Kombinatorika & Teknik Counting OSN-K

Fase 1 (Zero-Coding Analytical Track): Dari Intuisi ke Pembuktian Eksak

Novalio Daratha
Bimbingan OSN Informatika — Universitas Bengkulu

2026

Peta Materi Modul 1

1. Mengapa Kombinatorika adalah Kunci OSN-K?
2. Aturan Penjumlahan, Perkalian, & Casework Sistematis
3. Complementary Counting & Gap Method
4. Permutasi, Kombinasi, & Stars and Bars
5. Prinsip Inklusi–Eksklusi (PIE)
6. Pigeonhole Principle (Prinsip Sarang Merpati)
7. Counting dengan Grid & Rekurensi (DP Manual)
8. Studi Kasus Soal Asli OSN-K (2024)
9. Strategi Hari-H OSN-K

Mengapa Fokus Kombinatorika di Fase 1 (OSN-K)?

Realitas Ujian OSN-K Informatika

- **Tidak ada *live coding*** maupun kompilator C++.
- **30–40%** bobot soal berasal dari kombinatorika & *counting*.
- Banyak soal berbentuk **isian singkat** (1 salah kecil = 0 poin).
- Rumus saja tidak cukup—soal menyembunyikan pola di balik cerita.

4 Prinsip Emas *Counting* OSN-K

1. Jangan menghitung ganda (*no double counting*).
2. Jangan ada kasus yang terlewat (*exhaustive*).
3. Uji di kasus kecil ($n = 1, 2, 3$) terlebih dahulu.
4. Cek apakah menghitung **lawannya (komplemen)** lebih mudah!

Pilar Kelulusan OSN-K

1. Kombinatorika & Logika
Casework, Komplemen, PIE, PHP

↓

2. Algoritma Manual
Greedy, DP Tabel, Graf, *Bitwise*

↓

3. *Deep Code Tracing*
Pola Rekursi & Invarian Loop

Aturan Penjumlahan, Perkalian, & Seni *Casework*

Aturan Penjumlahan (*Rule of Sum*)

Jika tugas dapat diselesaikan lewat Kasus A (m cara) **ATAU** Kasus B (n cara), dan keduanya **saling lepas** ($A \cap B = \emptyset$):

$$\text{Total} = m + n$$

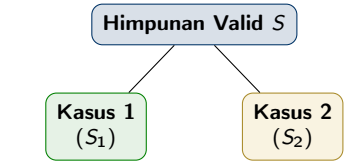
Aturan Perkalian (*Rule of Product*)

Jika tugas terdiri dari Tahap 1 (m cara) **LALU** Tahap 2 (n cara untuk *setiap* pilihan Tahap 1):

$$\text{Total} = m \times n$$

Kapan Harus Memecah Kasus (*Casework*)?

Pecah kasus ketika **banyak pilihan di tahap berikutnya bergantung pada pilihan sebelumnya**!



Contoh OSN-K 1: Jebakan Digit Nol pada *Casework*

Soal

Berapa banyak **bilangan genap 4 digit** dengan **semua angka berbeda** dari digit $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$?

Mengapa Tidak Bisa Langsung $5 \times 4 \times 3 \times 3$?

Digit **0** punya dua aturan yang bertabrakan: boleh di belakang (genap), tetapi **tidak boleh di depan**! Pilihan digit depan bergantung pada apakah 0 sudah dipakai di belakang.

Kasus 1: Digit terakhir $= 0$

- Digit ke-4: 1 cara ($\{0\}$); ke-1: 5 cara ($\{1..5\}$)
- Digit ke-2: 4 cara; Digit ke-3: 3 cara
- Subtotal $= 5 \times 4 \times 3 \times 1 = 60$

Kasus 2: Digit terakhir $\in \{2, 4\}$

- Digit ke-4: 2 cara; ke-1: 4 cara ($\neq 0, \neq$ ke-4)
- Digit ke-2: 4 cara (0 boleh!); ke-3: 3 cara
- Subtotal $= 4 \times 4 \times 3 \times 2 = 96$

Total Valid $= 60 + 96 = 156$. (*Sanity check*: Total $300 -$ Ganjil $144 = 156$ ✓)

Complementary Counting: Hitung Lawannya!

Prinsip Komplemen

$|\text{Valid}| = |\text{Total}| - |\text{Tidak Valid}|$. **Sinyal soal:** *"minimal satu"*, *"tidak semua"*, atau *"tidak bersebelahan"*.

Contoh 2A: Minimal Satu Tiap Jenis

Dari 7 soal (4 Komb., 3 Graf), pilih 4 soal dengan **minimal 1 Komb. dan 1 Graf**.

- Total memilih 4 soal: $\binom{7}{4} = 35$.
- Semua Komb.: $\binom{4}{4} = 1$; Semua Graf: $\binom{3}{4} = 0$.
- Valid $= 35 - 1 - 0 = 34$.

Contoh 2B: Tidak Bersebelahan

6 buku berbeda (4 Mat, 2 Inf) sebaris agar **2 buku Inf TIDAK bersebelahan**.

- **Komplemen:** $6! - 5! \times 2! = 720 - 240 = 480$.
- ***Gap Method*:** 4 Mat ($4! = 24$), sisip 2 Inf ke 5 celah (_M_M_M_M_):
  $P(5, 2) = 20 \Rightarrow 24 \times 20 = 480$.

Catatan Penting: Jika ada ≥ 3 objek yang tidak boleh saling bersebelahan, ***Gap Method*** jauh lebih aman daripada komplemen!

Peta Cepat: Identik vs. Berbeda & Urutan Penting vs. Tidak

Skenario Soal	Ciri Kunci	Rumus	Contoh OSN-K
Permutasi r dari n	Objek beda, urutan penting	$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$	Menyusun podium juara 1–3
Kombinasi r dari n	Objek beda, urutan abaikan	$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$	Memilih tim 3 siswa
Permutasi Unsur Sama	Ada objek identik, berjajar	$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$	Anagram kata `BENGKULU`
Stars & Bars $(x_i \geq 0)$	**Objek identik** ke wadah beda	$\binom{n+k-1}{k-1}$	Bagi n koin identik ke k anak
Stars & Bars $(x_i \geq 1)$	Sama, tiap wadah ≥ 1	$\binom{n-1}{k-1}$	Tiap anak minimal 1 koin

Jebakan Klasik Siswa OSN-K

Selalu cek kata **"identik / sama persis"** vs. **"berbeda / bernomor"**! Membagi 5 apel *identik* ke 3 anak ($\binom{7}{2} = 21$) sangat berbeda dengan membagi 5 buku *berbeda* ke 3 anak ($3^5 = 243$).

Stars and Bars (Bintang dan Sekat) & Substitusi Batas Bawah

Intuisi Visual: $x_1 + x_2 + x_3 = 6$ ($x_i \geq 0$)

Setiap solusi berkorespondensi 1-ke-1 dengan susunan **6 bintang ($\star$)** dan **2 sekat ($|$)**:



Total $6 + (3 - 1) = 8$ posisi, pilih 2 posisi untuk sekat: $\binom{8}{2} = 28$.

Contoh 3: Batas Bawah Berbeda

Bagi **12 koin identik** ke 4 siswa (x_1, x_2, x_3, x_4) sehingga $x_1 \geq 2$ dan $x_2, x_3, x_4 \geq 1$. **Trik Substitusi (Bagikan Syarat Minimum Dulu!):**

$$y_1 = x_1 - 2 \geq 0, \quad y_2 = x_2 - 1 \geq 0,$$
$$y_3 = x_3 - 1 \geq 0, \quad y_4 = x_4 - 1 \geq 0.$$

Sisa koin: $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 12 - 5 = 7$.

$$\text{Banyak cara} = \binom{7 + 4 - 1}{4 - 1} = \binom{10}{3} = 120.$$

Prinsip Inklusi–Eksklusi (PIE): Mengoreksi Hitungan Ganda

Rumus PIE untuk 3 Himpunan

$$|A \cup B \cup C| = \sum |A| - \sum |A \cap B| + |A \cap B \cap C|$$

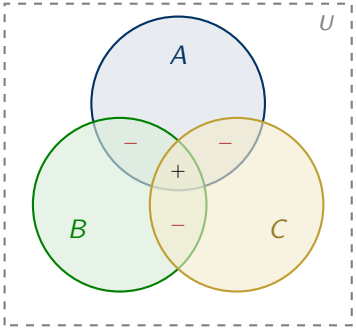
Versi Komplemen (Bebas dari A, B, dan C):

$$|\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}| = |U| - \sum |A| + \sum |A \cap B| - |A \cap B \cap C|$$

Contoh 4A: Kelipatan 2, 3, atau 5

Berapa bilangan bulat di $\{1, \ldots, 120\}$ yang **tidak** habis dibagi 2, 3, maupun 5?

- $|A_2| = 60,\ |A_3| = 40,\ |A_5| = 24 \ \Rightarrow\ \Sigma_1 = 124$
- $|A_6| = 20,\ |A_{10}| = 12,\ |A_{15}| = 8 \ \Rightarrow\ \Sigma_2 = 40$
- $|A_{30}| = 4 \ \Rightarrow\ \Sigma_3 = 4$
- Jawaban $= 120 - 124 + 40 - 4 = 32$.



Tanda selalu bergantian: $+, -, +, -\ldots$

Kombo Favorit OSN-K: *Stars and Bars* + PIE (Batas Atas)

Contoh 4B (Level OSN-K)

Tentukan banyak solusi bilangan bulat (x_1, x_2, x_3) untuk $x_1 + x_2 + x_3 = 10$ dengan $0 \le x_1, x_2, x_3 \le 5$.

Langkah Penyelesaian

Misalkan A_i = solusi yang **melanggar** batas atas x_i ($x_i \ge 6$).

1. **Total ($|U|$):** $\binom{10+3-1}{2} = \binom{12}{2} = 66$.
2. **Melanggar ≥ 1 ($|A_i|$):** $x_i' = x_i - 6 \ge 0 \Rightarrow$ sisa 4: $\binom{6}{2} = 15$. Untuk 3 variabel: $3 \times 15 = 45$.
3. **Melanggar ≥ 2 ($|A_i \cap A_j|$):** Butuh $\ge 12 > 10 \Rightarrow 0$!

Hasil Akhir & Verifikasi

$$\text{Valid} = 66 - 45 + 0 = 21.$$

Trik Cek Cepat (Simetri):
Substitusi $y_i = 5 - x_i$ ($0 \le y_i \le 5$):

$$y_1 + y_2 + y_3 = 15 - 10 = 5.$$

Karena $5 \le 5$, tak ada pelanggaran batas atas: $\binom{5+2}{2} = \binom{7}{2} = 21$ ✓

Pigeonhole Principle (PHP): Berpikir *Worst-Case*

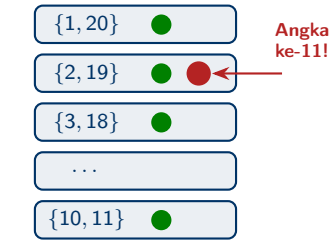
Teorema Dasar & Bentuk Umum

- Jika $n+1$ merpati masuk ke n sarang, **pasti ada** sarang berisi ≥ 2 merpati.
- **Umum:** N objek ke k wadah $\Rightarrow$ pasti ada wadah berisi minimal $\lceil N/k \rceil$ objek.

Contoh 5: Pasangan Berjumlah 21

Dari $\{1, 2, \ldots, 20\}$, berapa minimal angka yang harus dipilih agar **pasti ada dua angka berjumlah 21**?

- Buat **10 sarang**: $\{1, 20\}, \{2, 19\}, \ldots, \{10, 11\}$.
- *Worst-case*: ambil 1 dari tiap sarang (10 angka) — belum ada yang berjumlah 21.
- Angka ke-**11** *pasti* melengkapi satu pasangan $\Rightarrow$ 11.



10 sarang $\Rightarrow$ maks. 10 aman

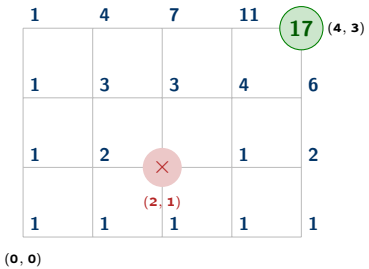
Wajib Buktikan 2 Arah!

1) 11 selalu cukup (PHP).
2) 10 belum cukup (contoh: $\{1, \ldots, 10\}$).

Jembatan ke DP Manual: Jalur Grid dengan Rintangan

Contoh 6 (Khas OSN-K)

Dari titik $(0, 0)$ ke $(4, 3)$, hanya boleh melangkah ke **Kanan** atau ke **Atas**. Titik $(2, 1)$ **rusak** (tidak boleh dilewati). Berapa banyak jalur valid?



Verifikasi Dua Metode!

Metode 1 (Komplemen + Kombinasi):

- Total jalur: $\binom{4+3}{3} = \binom{7}{3} = 35$.
- Lewat $(2, 1)$: $\binom{3}{1} \times \binom{4}{2} = 3 \times 6 = 18$.
- Valid $= 35 - 18 = 17$.

Metode 2 (Tabel DP Manual):

$$dp(x, y) = dp(x - 1, y) + dp(x, y - 1)$$

dengan $dp(2, 1) = 0 \implies dp(4, 3) = 17$ ✓

Soal Asli OSN-K 2024: *Pigeonhole + Stars & Bars*

OSN-K 2024 No. 17 & 19 — Mencicipi Biskuit

Tiap bebek mengambil 1 biskuit dari toples tipe berbeda.

- **No. 17:** 7 tipe @ 5 butir. Minimal bebek agar semua tipe dicicipi ≥ 1 bebek?
  Worst-case: habiskan 6 tipe dulu $(6 \times 5 = 30)$ $+1 = 31$.
- **No. 19:** 3 tipe (A, B, C) dengan $A + B + C = 25$. Jika minimal bebek $= 20$, berapa triplet (A, B, C)?
  Syarat: $25 - \min(A, B, C) + 1 = 20 \Rightarrow \min = 6$.
  Semua ≥ 6: $\binom{(25-18)+2}{2} = \binom{9}{2} = 36$.
  Semua ≥ 7: $\binom{(25-21)+2}{2} = \binom{6}{2} = 15$.
  Jadi min $= 6$ ada $36 - 15 = 21$ triplet!

OSN-K 2024 No. 27 — Cek dan Ricek

Fungsi `cek(S)` mengembalikan `true` jika karakter string `S` **terurut tidak turun** ($S_0 \leq S_1 \leq S_2$).
Berapa banyak string panjang 3 dari huruf `'A'..'Z'` yang bernilai `true`?

- Memilih 3 huruf (boleh sama) dari 26 huruf lalu langsung terurut unik = ***Stars & Bars***!
- $\binom{26+3-1}{3} = \binom{28}{3} = \frac{28 \times 27 \times 26}{6} = 3276$.

Arsip Latihan Tambahan Modul 1

OSN-K 2024 (No. 14–16), OSN-K 2025 (No. 5, 14–16), OSN-K 2026 (No. 6, 23–25).

Checklist 5 Langkah Menghadapi Soal Kombinatorika OSN-K

1. **Bedah Struktur Objek:** Apakah objek *identik* atau *berbeda*? Apakah urutan penting? Adakah elemen khusus (seperti angka 0 atau titik terlarang)?
2. **Uji Kasus Kecil ($n = 1, 2, 3$):** Hitung manual untuk n kecil sebelum menulis rumus! Ini langsung mendeteksi salah paham soal dan memunculkan pola rekurensi.
3. **Cek Komplemen Dulu:** Jika syaratnya rumit ("minimal satu", "tidak berurutan"), hitung Total − Pelanggaran.
4. **Partisi *Casework* dengan Bersih:** Pastikan kasus tidak tumpang tindih; jika terpaksa tumpang tindih, gunakan **PIE** secara disiplin.
5. **Verifikasi Silang (*Dual-Method Check*):** Khusus soal **isian singkat**, cek jawabanmu dengan cara kedua (misal *Stars & Bars* vs. *Casework*, atau Kombinasi vs. Tabel DP).

Target Latihan Modul 1

Selesaikan seluruh 12 soal di **Lembar Kerja Modul 1 (C1–C6)** secara mandiri tanpa kalkulator, lalu catat setiap kesalahan hitung di *Error Log*!

Terima Kasih

Sesi Diskusi & Latihan Lembar Kerja Modul 1

Novalio Daratha
Bimbingan OSN Informatika — Universitas Bengkulu