KUNCI JAWABAN & PANDUAN MENTOR

Modul 1: Kombinatorika & Teknik *Counting* (OSN-K)

Dilengkapi Pembahasan *Dual-Method* dan Analisis Kesalahan Siswa

Ringkasan Jawaban Eksak (Quick Reference)

No.	Jawaban	No.	Jawaban
Soal 1	(a) Stars & Bars, (b) PIE, (c) PHP, (d) Kompl.	**Soal 7**	**15**
Soal 2	**74** (bukan 112)	**Soal 8**	**16**
Soal 3	**300**	**Soal 9**	**33**
Soal 4	**1440**	**Soal 10**	**55**
Soal 5	**165**	**Soal 11**	**Siswa B benar (120)**
Soal 6	**80**	**Soal 12**	$T(6) = 23$ (+ soal orisinal)

Pembahasan Lengkap & Verifikasi Metode Ganda

Soal 1. [C1] Identifikasi Strategi

(a) ***Stars and Bars*** (objek identik dibagi ke wadah berbeda, syarat $x_i \geq 1$).

(b) **Prinsip Inklusi–Eksklusi (PIE)** (menghindari beberapa kelipatan sekaligus).

(c) ***Pigeonhole Principle*** **(PHP)** (menjamin kondisi tercapai dalam *worst-case*).

(d) ***Complementary Counting*** (atau *Gap Method*).

Soal 2. [C2] Deteksi *Double Counting* — Jawaban: 74

(a) Misalkan tim terpilih memuat dua siswa kelas XII (A, B) dan satu siswa kelas XI (x). Rumus $\binom{4}{1}\binom{8}{2}$ menghitung tim $\{A, B, x\}$ sebanyak **dua kali**: sekali saat A dipilih pertama lalu $\{B, x\}$ dari sisanya, dan sekali lagi saat B dipilih pertama lalu $\{A, x\}$ dari sisanya. Tim berisi 3 siswa kelas XII bahkan terhitung **3 kali**!

(b) **Komplemen:** Total memilih 3 dari 9 siswa adalah $\binom{9}{3} = 84$. Tim tidak valid (0 siswa kelas XII, semua dari kelas XI) adalah $\binom{5}{3} = 10$. Jadi valid $= 84 - 10 =$ **74**.
Cek Metode 2 (Casework): $\binom{4}{1}\binom{5}{2} + \binom{4}{2}\binom{5}{1} + \binom{4}{3}\binom{5}{0} = 40 + 30 + 4 = 74$ ✓.

Soal 3. [C3] Bilangan Ganjil 4 Digit — Jawaban: 300

- Digit ganjil di $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ adalah $\{1, 3, 5\}$ (tidak melibatkan 0, sehingga tidak perlu pecah kasus!).
- Digit ke-4 (satuan): **3** pilihan ($\{1, 3, 5\}$).
- Digit ke-1 (ribuan): tidak boleh 0 dan tidak boleh sama dengan digit ke-4 $\Rightarrow 7-2 =$ **5** pilihan.
- Digit ke-2 (ratusan): kini 0 boleh dipakai, sudah terpakai 2 digit $\Rightarrow 7-2 =$ **5** pilihan.
- Digit ke-3 (puluhan): tersisa **4** pilihan.
- Total $= 5 \times 5 \times 4 \times 3 =$ **300**.

Jebakan Umum Siswa (Perhatikan di Error Log)

Siswa sering salah menghitung digit ke-2 menjadi 4 (lupa bahwa angka 0 yang tadi dilarang di digit pertama kini kembali tersedia untuk digit kedua!).

Soal 4. [C3] Formasi Foto Tanpa Berdampingan — Jawaban: 1440

- **Metode 1 (*Gap Method*):** Susun 4 siswa Bengkulu terlebih dahulu: $4! = 24$ cara. Terbentuk **5 celah** (`_ B _ B _ B _ B _`). Pilih dan susun 3 siswa luar Bengkulu ke dalam 5 celah: $P(5,3) = 5 \times 4 \times 3 = 60$ cara. Total $= 24 \times 60 =$ **1440**.
- **Metode 2 (PIE untuk Verifikasi):** Total $7! = 5040$. Pasangan bersebelahan: $\binom{3}{2} \times 6! \times 2! = 4320$. Dua pasangan sekaligus (3 siswa berurutan): $3 \times (2 \times 5!) = 720$. Valid $= 5040 - 4320 + 720 =$ **1440** ✓.

Soal 5. [C3] Distribusi Modul Identik — Jawaban: 165

- Substitusi syarat minimum: $y_A = x_A - 3,\ y_B = x_B - 2,\ y_C = x_C - 1,\ y_D = x_D - 1$ dengan $y_i \geq 0$.
- Sisa modul: $y_A + y_B + y_C + y_D = 15 - (3 + 2 + 1 + 1) = 8$.
- *Stars and Bars*: $\binom{8+4-1}{4-1} = \binom{11}{3} = \frac{11 \times 10 \times 9}{6} =$ **165**.

Soal 6. [C3] Kelipatan 3 atau 5, Tidak Habis Dibagi 7 — Jawaban: 80

- Misalkan A_d himpunan kelipatan d pada $\{1, \ldots, 200\}$. Dicari $|(A_3 \cup A_5) \setminus A_7| = |A_3 \cup A_5| - |A_{21} \cup A_{35}|$.
- $|A_3| = \lfloor 200/3 \rfloor = 66$, $|A_5| = 40$, $|A_{15}| = 13 \implies |A_3 \cup A_5| = 66 + 40 - 13 = 93$.
- $|A_{21}| = \lfloor 200/21 \rfloor = 9$, $|A_{35}| = \lfloor 200/35 \rfloor = 5$, $|A_{105}| = 1 \implies |A_{21} \cup A_{35}| = 9 + 5 - 1 = 13$.
- Jawaban $= 93 - 13 =$ **80**.

Soal 7. [C4] Persamaan Bulat dengan Batas Bawah & Atas — Jawaban: 15

- Substitusi $a = x - 1,\ b = y - 1,\ c = z - 1 \implies a + b + c = 11$ dengan $0 \leq a, b, c \leq 5$.
- **Metode 1 (PIE):** Total tanpa batas atas $= \binom{11+2}{2} = \binom{13}{2} = 78$. Pelanggaran ≥ 1 variabel ($a \geq 6 \Rightarrow$ sisa 5): $3 \times \binom{5+2}{2} = 3 \times 21 = 63$. Pelanggaran ≥ 2 variabel butuh $\geq 12 > 11 \implies 0$. Valid $= 78 - 63 =$ **15**.
- **Metode 2 (Trik Simetri — Sangat Cepat!):** Misalkan $a' = 5 - a,\ b' = 5 - b,\ c' = 5 - c$. Maka $a' + b' + c' = 15 - 11 = 4$ ($0 \leq a', b', c' \leq 5$). Karena $4 < 6$, tidak ada batas atas yang mungkin dilanggar $\implies \binom{4+2}{2} = \binom{6}{2} =$ **15** ✓.

Soal 8. [C4] Keterbagian Terjamin (*Pigeonhole*) — Jawaban: 16

- **Pembuktian 16 selalu cukup:** Tulis setiap $n \in \{1, \ldots, 30\}$ sebagai $n = 2^k \cdot m$ dengan m bilangan ganjil. Nilai m yang mungkin hanyalah $\{1, 3, 5, \ldots, 29\}$ (tepat **15 sarang**). Jika dipilih **16 bilangan**, menurut PHP pasti ada dua bilangan dengan bagian ganjil m yang sama, yaitu $2^{k_1}m$ dan $2^{k_2}m$ ($k_1 < k_2$), sehingga bilangan yang kecil habis membagi yang besar!
- **Pembuktian 15 belum cukup (*counterexample*):** Ambil $S' = \{16, 17, \ldots, 30\}$ (berisi 15 bilangan). Karena $2 \times 16 = 32 > 30$, tidak ada satu pun bilangan yang habis membagi bilangan lainnya. Jadi nilai minimalnya tepat **16**.

Soal 9. [C4] Grid $(0,0) \to (5,4)$ Menghindari $(2,1)$ dan $(3,3)$ — Jawaban: 33

- **Metode 1 (PIE):**
  - Total jalur: $\binom{5+4}{4} = \binom{9}{4} = 126$.
  - Lewat $A = (2,1)$: $\binom{3}{1}\binom{6}{3} = 3 \times 20 = 60$.

  - Lewat $B = (3, 3)$: $\binom{6}{3}\binom{3}{1} = 20 \times 3 = 60$.
  - Lewat **keduanya** (A lalu B): $\binom{3}{1} \times \binom{3}{1} \times \binom{3}{1} = 3 \times 3 \times 3 = 27$.
  - Valid $= 126 - 60 - 60 + 27 = \mathbf{33}$.
- **Metode 2 (DP Manual):** Baris per baris menghasilkan $dp(5, 4) = \mathbf{33}$ ✓.

Jebakan Umum Siswa (Perhatikan di Error Log)

Siswa yang hanya menghitung $126 - 60 - 60 = 6$ lupa bahwa jalur yang melewati A **dan** B dikurangi dua kali, sehingga wajib ditambahkan kembali (+27).

Soal 10. [C5] String Biner Panjang 8 Tanpa `"11"` — Jawaban: 55

- **Metode Rekurensi:** Misal $f(n)$ banyak string valid panjang n. Jika karakter terakhir `0`, sisa $n-1$ bebas valid ($f(n-1)$). Jika berakhir `1`, karakter sebelumnya wajib `0`, sisa $n-2$ bebas valid ($f(n-2)$). Jadi $f(n) = f(n-1) + f(n-2)$ dengan $f(1) = 2,\ f(2) = 3$.
  Barisan: $2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \mathbf{55}$.
- **Cek *Casework* (k buah `1`):**

$$\sum_{k=0}^{4} \binom{9-k}{k} = \binom{9}{0} + \binom{8}{1} + \binom{7}{2} + \binom{6}{3} + \binom{5}{4} = 1 + 8 + 21 + 20 + 5 = \mathbf{55}\ \checkmark.$$

- **Evaluasi untuk $N = 12$:** Rekurensi jauh lebih cepat dan minim salah hitung (cukup penjumlahan 4 kali lagi: $89, 144, 233, 377$), sedangkan *casework* menuntut penghitungan 7 kombinasi besar ($\binom{13}{0}$ hingga $\binom{7}{6}$) yang rawan salah perkalian/pembagian manual.

Soal 11. [C5] Audit Bukti Soal Sepatu — Jawaban: Siswa B benar (120)

- **Kesalahan Siswa A:** Ketika memilih 2 sepatu bebas dari 8 sepatu tersisa ($\binom{8}{2} = 28$), terdapat 4 cara di mana 2 sepatu tambahan itu **membentuk pasangan cocok kedua**! Akibatnya, setiap konfigurasi yang memiliki **2 pasang cocok** (seharusnya tidak valid) tidak hanya ikut terhitung, bahkan terhitung **dua kali** (sekali saat pasangan-1 dipilih dulu, sekali saat pasangan-2 dipilih dulu).
- **Pembuktian selisih 20:** Banyak cara memilih tepat 2 pasang cocok adalah $\binom{5}{2} = 10$. Karena tiap konfigurasi 2 pasang dihitung 2× oleh Siswa A, terdapat kelebihan $2 \times 10 = \mathbf{20}$. Maka $140 - 20 = \mathbf{120}$, cocok dengan hasil Siswa B!

Soal 12. [C6] Model Rekurensi Tangga Robot — Jawaban: $T(6) = 23$

(a) **Definisi *State*:**

- $A(n)$ = banyak cara mencapai tangga n dengan langkah terakhir **bukan 3** (yaitu 1 atau 2, atau titik awal $n = 0$).
- $B(n)$ = banyak cara mencapai tangga n dengan langkah terakhir **adalah 3**.
- Total $T(n) = A(n) + B(n)$, basis $A(0) = 1,\ B(0) = 0,\ T(0) = 1$ (dan 0 untuk indeks negatif).

Relasi Transisi ($n \geq 1$):

$$A(n) = T(n-1) + T(n-2), \qquad B(n) = A(n-3) \ \text{(untuk } n \geq 3).$$

Tabel Perhitungan:

n	0	1	2	3	4	5	**6**
$A(n)$	1	1	2	3	6	11	20
$B(n)$	0	0	0	1	1	2	3
$T(n)$	1	1	2	4	7	13	**23**

Verifikasi Komplemen: Tanpa larangan (Tribonacci), $T_{\text{bebas}}(6) = 13 + 7 + 4 = 24$. Satu-satunya urutan terlarang berjumlah 6 dengan dua angka 3 berturut-turut adalah $(3, 3)$ (1 cara). Maka $24 - 1 = \mathbf{23}$ ✓.

(b) **Rubrik Penilaian Kreasi Soal (Skor 0–4):** (1) Pernyataan soal tidak ambigu (jelas identik vs. berbeda), (2) Teknik yang dipilih benar-benar menyederhanakan soal, (3) Jawaban eksak terverifikasi, (4) Untuk soal PHP, siswa menyertakan contoh tandingan (*counterexample*) untuk $k - 1$.

Catatan Pelaksanaan Sesi Tatap Muka (90–120 Menit)

- **Menit 0–35:** Paparan interaktif menggunakan `modul1_kombinatorika_slides.pdf` (libatkan siswa menghitung kasus kecil di papan tulis).
- **Menit 35–95:** Pengerjaan mandiri `modul1_kombinatorika_worksheet.pdf` (target minimal Soal 1–9 selesai di kelas; Soal 10–12 untuk siswa cepat atau tugas rumah).
- **Menit 95–120:** Bedah silang jawaban menggunakan kunci ini; wajibkan setiap siswa mencatat tipe kesalahannya di *Error Log* (mis. lupa digit 0, lupa tambah irisan PIE, salah bedakan identik vs. berbeda).