Logika, Invarian, Paritas, & Teori Permainan

Fase 1 (Zero-Coding Analytical Track): Memecahkan Soal "Mustahil" dalam 30 Detik

Novalio Daratha
Bimbingan OSN Informatika — Universitas Bengkulu

2026

Peta Materi Modul 2

1. Logika Proposisi & Deduksi Sistematis
2. Paritas, Invarian, & Monovarian
3. Teori Permainan: Posisi Menang (W) & Kalah (L)
4. Permainan Nim & Trik XOR (Nim-Sum)
5. Strategi Simetri & Prinsip Ekstremal
6. Studi Kasus Soal Asli OSN-K (2024–2025)
7. Strategi Hari-H OSN-K

Logika Formal: Senjata Anti-Jebakan Soal Cerita

Aturan Wajib Hafal & Paham

- **Implikasi:** $(P \Rightarrow Q) \equiv (\neg P \vee Q)$.
  Hanya SALAH jika P benar dan Q salah.
- **Kontraposisi:** $(P \Rightarrow Q) \equiv (\neg Q \Rightarrow \neg P)$.
- **Hukum De Morgan:**

$$\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q, \quad \neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$$

- **Negasi Kuantor:**

$$\neg(\forall x,\ P(x)) \equiv \exists x,\ \neg P(x)$$

Strategi Soal Jujur vs. Bohong

Jangan menebak acak! Gunakan **Tabel Asumsi Kasus**:

1. Daftar semua kandidat pelaku/jawaban.
2. Uji tiap kandidat: hitung berapa pernyataan yang menjadi **Benar (B)** dan **Salah (S)**.
3. Pilih baris yang sesuai syarat soal!

Trik Cepat Kontradiksi

Jika dua pernyataan saling bertolak belakang (X dan $\neg X$), **pasti tepat satu benar dan satu salah!**

Contoh OSN-K 1: Deduksi Kasus dengan Tabel Kebenaran

Soal

Empat siswa (A, B, C, D) dituduh memecahkan piala. Tepat **1 orang pelakunya** dan tepat **1 orang berkata jujur**:
A: "B pelakunya." B: "D pelakunya." C: "Bukan saya." D: "B berbohong."
Siapa pelakunya, dan siapa yang berkata jujur?

Pelaku	A	B	C	D	**Jml Jujur**
A	S	S	B	B	2 (Salah)
B	B	S	B	B	3 (Salah)
C	S	S	S	**B**	**1 (Valid!)**
D	S	B	B	S	2 (Salah)

Trik 10 Detik (Tanpa Tabel Penuh!)

Perhatikan B ("D pelakunya") dan D ("B berbohong") **saling berlawanan**!

- Maka satu-satunya orang jujur pasti ada di $\{B, D\}$.
- Artinya A dan C **pasti berbohong!**
- Karena C ("Bukan saya") bohong $\implies$ C **pelakunya!** (Sehingga D jujur.)

Invarian & Monovarian: Kunci Soal Proses Berulang

Apa itu Invarian?

Suatu nilai atau sifat yang **TIDAK BERUBAH** setiap kali operasi dilakukan.

- **Paritas:** genap/ganjil suatu jumlah.
- **Modulo k:** sisa pembagian (mis. mod 3).
- **Pewarnaan:** selisih kotak hitam vs. putih.

Kegunaan: Membuktikan suatu keadaan akhir **MUSTAHIL** dicapai!

Apa itu Monovarian?

Suatu nilai (biasanya bilangan bulat ≥ 0) yang **SELALU NAIK KETAT** atau **SELALU TURUN KETAT** di setiap langkah.

- Contoh: jumlah inversi pada *Bubble Sort*.
- Contoh: total energi/jarak ke tujuan.

Kegunaan: Membuktikan proses/algoritma **PASTI BERHENTI** (dan menghitung jumlah langkahnya)!

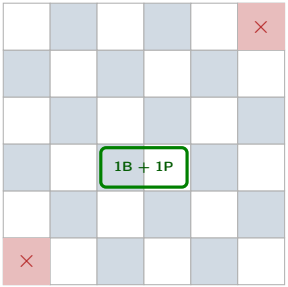
Contoh 2A: Operasi Papan Tulis (Invarian Paritas)

Di papan tertulis angka $1, 2, \ldots, 10$. Tiap langkah, hapus dua angka a, b dan tulis $|a - b|$. Setelah 9 langkah tersisa 1 angka. **Mungkinkah tersisa 0?**
Solusi: Jumlah awal $= \frac{10 \times 11}{2} = 55$ (**ganjil**). Tiap operasi mengubah jumlah sebesar $(a + b) - |a - b| = 2\min(a, b)$ (**genap**). Maka **paritas jumlah tetap ganjil!** Karena 0 genap, **MUSTAHIL!**

Contoh 2B: Invarian Pewarnaan Papan Catur (*Tiling*)

Soal Klasik OSN

Papan catur 8×8 dibuang **dua kotak sudut berlawanan** (kiri-bawah dan kanan-atas), menyisakan 62 kotak. Mungkinkah seluruh sisa papan ditutup tepat oleh **31 domino** 1×2?



Ilustrasi 6×6: kedua sudut sewarna!

Bukti dengan Invarian Warna

1. Warnai papan seperti catur (32 Biru, 32 Putih).
2. Dua sudut berlawanan $(1,1)$ dan $(8,8)$ memiliki $r + c$ sama-sama genap $\Longrightarrow$ **berwarna sama** (mis. keduanya Biru).
3. Setelah dibuang, tersisa **30 Biru dan 32 Putih**.
4. Setiap domino 1×2 wajib menutup tepat **1 Biru + 1 Putih**.
5. Maka 31 domino butuh 31 Biru & 31 Putih $\neq (30, 32)$ $\Longrightarrow$ **MUSTAHIL!**

Teori Permainan (*Impartial Games*) & *Backward Induction*

Aturan Emas Posisi W dan L

Untuk permainan 2 pemain bergantian, informasi penuh, tanpa seri:

- **Posisi Kalah (L):** Tidak ada langkah lagi, **ATAU semua** langkah valid mengarah ke W.
- **Posisi Menang (W):** Ada **minimal satu** langkah valid menuju L!

Contoh 3: Ambil 1, 2, atau 3 Batu

Ada $N = 2026$ batu. Ambil $1, 2$, atau 3 batu per giliran; pengambil batu terakhir **MENANG**.

- Pola dari tabel bawah: $L \iff n \equiv 0 \pmod 4$.
- $2026 = 4 \times 506 + 2 \equiv 2 \pmod 4 \implies$ W!
- **Strategi Pemain 1:** Ambil **2 batu** (sisakan 2024, lalu balas tiap langkah k lawan dengan $4 - k$).



Panah hijau: langkah kemenangan ke L | Panah merah putus-putus: dari 4 semua langkah menuju W

Permainan Nim & Teorema Bouton (*Nim-Sum* / XOR)

Aturan Permainan Nim

Ada k tumpukan batu $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$. Tiap giliran, pilih **1 tumpukan** dan ambil **berapa saja** (≥ 1) batu. Pengambil batu terakhir **MENANG**.

Teorema Bouton (XOR Biner $\oplus$)

Hitung *Nim-sum*: $S = a_1 \oplus a_2 \oplus \cdots \oplus a_k$.

- $S = 0 \implies$ **Posisi Kalah (L)** (Pemain 2 menang).
- $S \neq 0 \implies$ **Posisi Menang (W)** (Pemain 1 menang).

Cara mencari langkah menang:
Cari tumpukan a_i yang memenuhi $a_i \oplus S < a_i$, lalu ubah menjadi $a_i' = a_i \oplus S$!

Contoh 4: Tumpukan $(3, 5, 7)$

Konversi ke biner lalu XOR per kolom (jumlah bit 1 ganjil $\to 1$, genap $\to 0$):

3	0	1	1
5	1	0	1
7	1	1	1
XOR	0	0	1

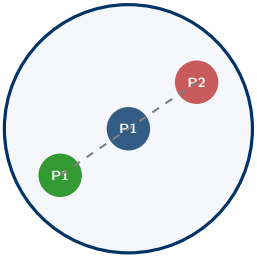
$S = 001_2 = 1 \neq 0 \implies$ **Pemain 1 MENANG!**
Ubah $7 \to 7 \oplus 1 = 6$ (ambil **1 batu** dari 7), atau $5 \to 4$, atau $3 \to 2$.

Strategi Simetri (*Mirroring*) & Prinsip Ekstremal

Strategi Simetri (*Copycat*)

Jika papan/keadaan memiliki **pusat simetri**, pemain yang berhasil menciptakan keadaan simetris **pasti menang** dengan meniru setiap langkah lawan di sisi berlawanan!
Contoh Meja Bundar: Dua pemain bergantian menaruh koin identik tanpa tumpang tindih.

- **Langkah 1 (Pemain 1):** Taruh koin tepat di **titik pusat meja**.
- **Selanjutnya:** Tiap Pemain 2 menaruh di (x, y), Pemain 1 taruh di $(-x, -y)$.
- Jika $(-x, -y)$ selalu muat, Pemain 1 tak pernah kehabisan langkah $\implies$ **Pemain 1 MENANG!**



Cerminkan terhadap titik pusat!

Prinsip Ekstremal

Saat macet menganalisis banyak objek, fokuslah pada elemen **terbesar / terkecil** (nilai maks, sisi terpendek, posisi paling ujung)!

Soal Asli OSN-K 2024 & 2025: Permainan Nim & Invarian FPB

OSN-K 2024 No. 9 — Mengambil Daun

Dua piring daun: $A = 2$, $B = 3$. Tiap giliran ambil ≥ 1 daun dari 1 piring; pengambil terakhir **menang**. Mana skenario yang menjamin **Pak Dengklek** menang?

- Ini adalah **Nim** $(2, 3)$! Posisi kalah (L) adalah piring sama banyak: $(1, 1), (2, 2)$.
- Jika **Pak Ganesh** mulai ambil 1 dari $A \Rightarrow$ tersisa $(1, 3)$ $(1 \oplus 3 = 2 \neq 0)$.
- Giliran **Pak Dengklek**: ambil 2 dari $B \Rightarrow (1, 1)$ (L bagi Ganesh!) $\implies$ **Opsi D**!

OSN-K 2025 No. 23–24 — Bebek Gayung

Bebek ke-P $(1 \ldots N)$ hanya mau mandi jika tepat $P = aX + bY$ liter $(a, b \geq 0)$.

- **No. 23 ($N = 20, X = 3, Y = 5$):** Tidak bisa dibentuk: $\{1, 2, 4, 7\} \Rightarrow 4$ bebek ($\frac{(3-1)(5-1)}{2} = 4$).
- **No. 24 ($N = 1000, X = 9, Y = 21$):**
  Invarian FPB: $\text{FPB}(9, 21) = 3 \Rightarrow$ air selalu kelipatan 3! Dari 333 kelipatan 3, bagi 3 jadi gayung $(3, 7)$:
  gagal $= \frac{(3-1)(7-1)}{2} = 6$.
  Bebek tak bisa mandi $= 1000 - (333 - 6) = 673$!

Arsip Latihan Tambahan Modul 2

OSN-K 2024 (No. 3, 4, 11–13), OSN-K 2025 (No. 2, 20–22), OSN-K 2026 (No. 1, 9, 10).

Checklist Cepat Soal Logika, Invarian, & Permainan OSN-K

1. **Soal Jujur–Bohong:** Cari dulu 2 pernyataan yang saling bertolak belakang, lalu buat tabel asumsi kasus.
2. **Soal "Mungkinkah mencapai keadaan X?":** Jika terasa mustahil, cari **Invarian** (cek berurutan: Paritas $\rightarrow$ Modulo 3/4 $\rightarrow$ Pewarnaan papan $\rightarrow$ Selisih tetap).
3. **Soal "Apakah proses berhenti / berapa langkah?":** Cari **Monovarian** (misal jumlah inversi atau total nilai yang berkurang konstan per operasi).
4. **Soal Permainan 1 Tumpukan / Grid:** Isi tabel W/L dari kondisi akhir (***Backward Induction***) minimal sampai $n = 12$ untuk menemukan periodenya (awas periode 7 atau aturan *Misère*!).
5. **Soal Banyak Tumpukan / Papan Simetris:** Uji **Nim-sum (XOR)** atau **Strategi Simetri (*Mirroring*)**.

Target Latihan Modul 2

Kerjakan 12 soal di **Lembar Kerja Modul 2 (C1–C6)** dan catat pola yang terlewat di *Error Log*!

Terima Kasih

Sesi Diskusi & Latihan Lembar Kerja Modul 2

Novalio Daratha
Bimbingan OSN Informatika — Universitas Bengkulu