KUNCI JAWABAN & PANDUAN MENTOR

Modul 2: Logika, Invarian, Paritas, & Teori Permainan (OSN-K)

Pembahasan Lengkap, Bukti Formal, dan Jebakan Umum Siswa

Ringkasan Jawaban Eksak (Quick Reference)

No.	Jawaban	No.	Jawaban
Soal 1	(b) Monovarian, Invarian, Simetri	**Soal 7**	(a) Tidak mungkin; (b) Tambah 1 **Biru**
Soal 2	Mustahil (13 Hitam $\neq$ 12 Putih)	**Soal 8**	(a) Tak seimbang; (b) Hanya $(3,3)$
Soal 3	A **dan** B	**Soal 9**	**Pemain 1 menang**, geser ke $(2,1)$
Soal 4	**301**	**Soal 10**	Klaim **SALAH** (P1 selalu menang)
Soal 5	$L : \{0,2,7,9\}$ (per. 7); P1 ambil **1**	**Soal 11**	Inversi (monovarian); tepat **6** swap
Soal 6	Nim-sum **12**; min. **4** dr tump. 9	**Soal 12**	$L \equiv 1 \pmod 4$; P1 ambil **1** batu

Pembahasan Lengkap

Soal 1. [C1] Kontraposisi & Identifikasi Strategi

(a) Kontraposisi ($P \Rightarrow Q \equiv \neg Q \Rightarrow \neg P$): *"Jika Budi tidak lolos OSN-K, maka ada minimal satu soal kombinatorika yang tidak dikerjakan dengan benar."* (Perhatikan negasi kuantor "semua" menjadi "ada minimal satu"!)

(b) (1) **Monovarian**; (2) **Invarian**; (3) **Strategi Simetri**.

Soal 2. [C2] Jalur Tertutup Papan 5×5

- Warnai papan 5×5 seperti papan catur: terdapat **13 sel Hitam** dan **12 sel Putih**.
- Setiap langkah ortogonal selalu berpindah warna (Hitam $\leftrightarrow$ Putih).
- Sebuah siklus tertutup yang kembali ke titik awal wajib memiliki panjang **genap** (jumlah sel Hitam dan Putih yang dikunjungi harus sama). Karena 25 ganjil ($13 \neq 12$), jalur tertutup tersebut **mustahil**!

Soal 3. [C3] Deduksi Seleksi OSN — Jawaban: A dan B

- Andaikan D lolos. Dari (iii), E juga lolos. Karena hanya 2 orang lolos, maka A, B, C semuanya tidak lolos. Namun dari (iv), jika C tidak lolos maka D tidak lolos — **kontradiksi!**
- Jadi D tidak lolos, dan dari (iii) E juga tidak lolos. Maka 2 orang yang lolos berasal dari $\{A, B, C\}$.
- Dari (ii), B dan C tidak mungkin lolos bersama. Dari (i), pasangan $\{A, C\}$ melanggar $A \Rightarrow B$.
- Uji pasangan $\{A, B\}$: (i) $B \Rightarrow B$ (Benar), (ii) $B \Rightarrow \neg C$ (Benar), (iii) $S \Leftrightarrow S$ (Benar), (iv) $\neg C \Rightarrow \neg D$ (Benar). Satu-satunya solusi: A **dan** B.

Soal 4. [C3] Angka Terakhir di Papan Tulis — Jawaban: 301

- Misalkan S adalah jumlah seluruh angka di papan dan k adalah banyak angka di papan.
- Setiap operasi mengganti $a + b$ dengan $a + b - 1$, sehingga S berkurang 1 dan k berkurang 1. Maka $S - k$ **adalah INVARIAN**!

- Awalnya $k_0 = 25$ dan $S_0 = \frac{25\times26}{2} = 325$, sehingga $S_0 - k_0 = 300$.
- Di akhir tersisa $k_{24} = 1$ bilangan, maka $S_{24} - 1 = 300 \implies S_{24} = \mathbf{301}$.

Soal 5. [C3] Permainan Batu $\{1, 3, 4\}$ — Jawaban: Pemain 1 menang, ambil 1 batu

- *Backward Induction* untuk $n = 0 \ldots 12$:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Status	**L**	W	**L**	W	W	W	W	**L**	W	**L**	W	W	W

- Terlihat pola **berperiode 7**: posisi $L \iff n \equiv 0$ atau $2 \pmod 7$.
- Untuk $N = 50$: $50 = 7 \times 7 + 1 \equiv 1 \pmod 7 \implies$ posisi W **(Pemain 1 Menang)**. Langkah kemenangan unik: ambil **1 batu** sehingga tersisa $49 \equiv 0 \pmod 7$ (L).

Jebakan Umum Siswa (Catat di Error Log)

Siswa yang hanya mengecek sampai $n = 5$ sering menduga polanya n genap $= L$. Biasakan mengecek minimal sampai $2 \times$ langkah terbesar $+ 4$ untuk memastikan periode!

Soal 6. [C3] Permainan Nim $(6, 9, 12, 15)$ — Jawaban: Nim-sum 12; min. 4 batu dari tumpukan 9

- Biner: $6 = 0110_2$, $9 = 1001_2$, $12 = 1100_2$, $15 = 1111_2$.
- *Nim-sum*: $S = 6 \oplus 9 \oplus 12 \oplus 15 = 1100_2 = \mathbf{12} \neq 0 \implies$ Pemain 1 menang.
- Cek tiap tumpukan p dengan target $p' = p \oplus 12 < p$: $6 \oplus 12 = 10$ (naik, tak valid); $9 \oplus 12 = 5$ (**ambil 4**); $12 \oplus 12 = 0$ (ambil 12); $15 \oplus 12 = 3$ (ambil 12).
- Jadi jumlah batu minimal yang diambil adalah **4 batu** (dari tumpukan 9 menjadi 5).

Soal 7. [C4] Pulau Bunglon — Jawaban: (a) Tidak mungkin; (b) Tambah 1 Biru

(a) Misalkan $(M, H, B) = (13, 15, 17) \equiv (1, 0, 2) \pmod 3$. Setiap pertemuan mengubah (M, H, B) sebesar $(-1, -1, +2)$ (atau permutasinya), sehingga **selisih antar dua warna tetap sama dalam modulo 3**! Agar semua menjadi 1 warna (dua warna jadi 0), selisih dua warna tersebut harus $0 \pmod 3$. Karena $(1, 0, 2)$ semuanya berbeda mod 3, **mustahil!**

(b) Agar semua bisa menjadi **Merah**, syaratnya $H \equiv B \pmod 3$. Saat ini $H \equiv 0$ dan $B \equiv 2 \pmod 3$. Dengan menambahkan **1 Biru**, keadaan menjadi $(13, 15, 18) \equiv (1, 0, 0) \pmod 3$ $(H \equiv B)$.
Verifikasi tercapai: 15 pertemuan $H + B \to 2M$ menghasilkan $(43, 0, 3)$; lalu 1 pertemuan $M + B \to 2H$ menjadi $(42, 2, 2)$; terakhir 2 pertemuan $H + B \to 2M$ menjadi $(46, 0, 0)$ ✓.

Jebakan Umum Siswa (Catat di Error Log)

Intuisi awal siswa biasanya menjawab "tambah Merah" untuk membantu Merah menang. Kenyataannya, menambah Merah malah membuat $M \equiv B \equiv 2 \pmod 3$ sehingga justru warna *Hijau* yang bisa menang!

Soal 8. [C4] Papan 5×5 dan Ubin 1×3 — Jawaban: (b) Hanya sel pusat $(3, 3)$

(a) Setiap ubin 1×3 (baik horizontal maupun vertikal) menutup tepat 1 sel berwarna 0, 1 sel berwarna 1, dan 1 sel berwarna 2 pada pewarnaan $(r + c) \bmod 3$. Pada papan

5×5 penuh (1-indeks), jumlah sel warna $(0, 1, 2)$ adalah $(9, 8, 8)$. Maka sel yang dibuang **wajib** berwarna 0 ($r + c \equiv 0 \pmod 3$) agar tersisa $(8, 8, 8)$. Sudut $(1, 1)$ memiliki $1 + 1 \equiv 2 \pmod 3$, meninggalkan $(9, 8, 7) \implies$ **mustahil!**

(b) Dengan argumen identik pada pewarnaan diagonal lawan $(r - c) \bmod 3$, warna yang berjumlah 9 adalah $r - c \equiv 0 \pmod 3$. Menyelesaikan sistem $r + c \equiv 0$ dan $r - c \equiv 0 \pmod 3$ memberi $2r \equiv 0 \implies r \equiv 0 \implies r = 3,\ c = 3$. Jadi **hanya sel pusat** $(3, 3)$ yang mungkin (dan terbukti dapat ditutup 8 ubin membentuk pola kincir angin mengelilingi $(3, 3)$!).

Soal 9. [C4] Permainan Grid 4×5 — Jawaban: Pemain 1 menang, geser ke $(2, 1)$

- Posisi (r, c) adalah L jika dan hanya jika $(4 - r)$ genap **dan** $(5 - c)$ genap!

$r \backslash c$	1	2	3	4	5
1	**W**	W	W	W	W
2	**L**	W	**L**	W	**L**
3	W	W	W	W	W
4	**L**	W	**L**	W	**L**

- Dari $(1, 1)$ (W), ketiga tetangganya adalah $(1, 2) = W$, $(2, 2) = W$, dan $(2, 1) = L$. Jadi langkah kemenangan unik Pemain 1 adalah geser ke bawah menuju $(2, 1)$.

Soal 10. [C5] Evaluasi Klaim Strategi Simetri — Jawaban: Klaim SALAH (Pemain 1 selalu menang)

- Klaim siswa salah karena Pemain 1 justru dapat **merebut kendali simetri** sejak langkah pertama!
- Jika N ganjil: Pemain 1 mewarnai **1 petak tepat di tengah** (petak ke-$\frac{N+1}{2}$), membagi papan menjadi dua pita simetris sama panjang.
- Jika N genap: Pemain 1 mewarnai **2 petak bersebelahan tepat di tengah** (petak $\frac{N}{2}$ dan $\frac{N}{2} + 1$), membagi papan menjadi dua pita simetris sama panjang $\frac{N-2}{2}$.
- Setelah itu, setiap langkah Pemain 2 di sisi kiri dibalas Pemain 1 dengan langkah cermin identik di sisi kanan $\implies$ **Pemain 1 selalu menang untuk semua** $N \geq 1$.

Soal 11. [C5] Monovarian & Jumlah Inversi — Jawaban: 6 operasi

(a) Definisikan **jumlah inversi** I = banyaknya pasangan indeks (i, j) dengan $i < j$ dan $a_i > a_j$. Setiap menukar dua elemen bersebelahan yang salah urut ($a_i > a_{i+1}$), nilai I turun tepat **1** (karena urutan relatif terhadap semua elemen lain tidak berubah). Karena $I \geq 0$ selalu turun 1, proses pasti berhenti saat $I = 0$ (terurut menaik).

(b) Pasangan inversi pada $[4, 2, 5, 1, 3]$: $(4, 2)$, $(4, 1)$, $(4, 3)$, $(2, 1)$, $(5, 1)$, $(5, 3) \implies$ tepat **6 operasi**.

Soal 12. [C6] Permainan *Misère* $\{1, 2, 3\}$ — Jawaban: Pemain 1 menang, ambil 1 batu

(a) Pada aturan *Misère* (pengambil batu terakhir KALAH): $n = 1 \to \mathbf{L}$ (terpaksa ambil terakhir); $n = 2, 3, 4 \to W$ (bisa menyisakan 1); $n = 5 \to \mathbf{L}$ (semua langkah ke $4, 3, 2$ yang W).

- Pola umum: posisi $L \iff n \equiv 1 \pmod 4$ (yaitu $1, 5, 9, 13, \ldots$).
- Untuk $N = 2026$: $2026 = 4 \times 506 + 2 \equiv 2 \pmod 4 \implies$ **W**. Pemain 1 mengambil **1 batu** (menyisakan $2025 \equiv 1 \pmod 4$), lalu selalu melengkapi langkah k lawan dengan $4 - k$ hingga lawan terpaksa menghadapi batu terakhir ($n = 1$).

(b) **Rubrik Kreasi Soal (0–4):** (1) Aturan jelas tanpa ambiguitas, (2) Kondisi terminal jelas, (3) Analisis W/L atau invarian benar, (4) Terdapat uji kasus kecil atau contoh tandingan.

Catatan Pelaksanaan Sesi Tatap Muka (90–120 Menit)

- **Menit 0–35:** Paparan `modul2_logika_slides.pdf`; demonstrasikan permainan ambil batu langsung antara mentor vs. 1 siswa di depan kelas sebelum membeberkan polanya!
- **Menit 35–95:** Pengerjaan mandiri `modul2_logika_worksheet.pdf` (target minimal Soal 1–9 selesai di kelas).
- **Menit 95–120:** Diskusi jebakan utama (Periode 7 di Soal 5, Bunglon Biru di Soal 7, dan Simetri Pemain 1 di Soal 10) serta pembaruan *Error Log*.